

## TRANSPORTE DE CALOR E MASSA E VARIAÇÕES DIMENSIONAIS EM ESFERÓIDES PROLATOS USANDO A TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS IRREVERSÍVEIS

**Vital Araújo Barbosa de Oliveira**

Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, CCT/UFCG, Campina Grande-PB, Brasil.  
e-mail: vaboliveira@ibest.com.br

**Antonio Gilson Barbosa de Lima**

Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, CCT/UFCG, Av: Aprígio Veloso, 882, Bodocongó, Campina Grande-PB, Brasil.  
e-mail: gilson@dem.ufcg.edu.br

**Resumo.** Este trabalho tem como objetivo apresentar uma modelagem matemática bidimensional que descreve o transporte de calor e massa (líquido e vapor) no interior de sólidos esferoideais prolatos, baseada na termodinâmica dos processos irreversíveis. O modelo considera condição de contorno convectiva na superfície do material, encolhimento e propriedades de transporte variáveis. Toda a formulação matemática foi resolvida usando o método numérico dos volumes finitos e uma formulação totalmente implícita. Como aplicação, a metodologia foi usada para prever a secagem de um grão de trigo nas seguintes condições:  $T=87,8^{\circ}\text{C}$ ,  $H=5,6\%$  e  $v=1,71\text{m/s}$ . Resultados numéricos do teor de umidade e temperatura no interior do produto e variações dimensionais são apresentados e analisados. A comparação do teor de umidade à dados experimentais reportados na literatura mostrou um razoável ajuste. Valores das condutividades de líquido e vapor foram obtidos usando a técnica do erro quadrático mínimo. Verificou-se que a temperatura do produto atinge rapidamente o equilíbrio e que o produto seca mais rapidamente em certas regiões, devido à geometria elipsoidal. O encolhimento afetou a taxa de secagem do sólido.

**Palavras chave:** Calor, massa, volumes finitos, elipsóide, encolhimento, trigo.

### 1. Introdução

Operações de desidratação ou secagem, assim como, a dinâmica do movimento de umidade em um material biológico são importantes passos nas indústrias químicas e de processamento de alimentos, como também no armazenamento e processamento de grãos e de outros produtos biológicos. A preservação de alguns alimentos, pela evaporação da umidade, permite minimizar o crescimento microbiano e prevenir o desenvolvimento da maioria das reações bioquímicas que ocorrem na presença de umidade. Portanto, essas operações têm tido um grande avanço nas indústrias de alimento e química, como também na estocagem de determinados produtos. Durante o processo de secagem, os sólidos sofrem variações nas suas características químicas, físicas e biológicas, que dependendo da intensidade do efeito, pode ocasionar sua perda ou inutilizá-los para certas funções. Por exemplo, no caso de grãos, as características alimentícias podem ser afetadas e, no caso das sementes, a sua característica germinativa.

O fenômeno de migração de umidade no interior de um produto biológico ainda não é bem definido pelos estudiosos. Os seguintes mecanismos de transporte da umidade no interior dos sólidos são apresentados na literatura (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kudra, 1986): transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade; transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (devido a gradientes de temperatura); transporte por efusão, que ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros; transporte de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura; transporte de líquido por forças capilares; transporte de líquido por pressão osmótica; transporte de líquido devido à gravidade; transporte de líquido e de vapor, devido à diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade, e transporte por difusão superficial.

A secagem convectiva diferencia-se de outras técnicas de separação, tal como a secagem osmótica, entre outras, pela maneira de como a água é retirada do sólido. Na secagem convectiva, a retirada de moléculas de água se dá pela movimentação do líquido ou vapor de  $\text{H}_2\text{O}$ , graças a uma diferença de pressão parcial do vapor d' água entre a superfície do produto e o ar que o envolve. Em relação aos alimentos, a remoção de água do material deve ser feita até que não afete de forma violenta suas características físicas, químicas e biológicas, como também suas funções alimentícias. No entanto, vale salientar que o ar pode provocar mudanças nas funções organolépticas do produto, e no caso específico das sementes, durante o processo de secagem, o aparecimento de fissuras e a perda parcial da função germinativa, que acontece devido à existência de tensões termo-mecânicas sobre o material. Essas tensões podem ser minimizadas se forem feita uma análise da distribuição do teor de umidade e da temperatura no interior do sólido. Portanto, para preservar ao máximo a qualidade final do produto, é necessário um estudo minucioso sobre as propriedades termodinâmicas do ar e o mecanismo de transferência de água do interior do material para a superfície.

Observa-se na literatura que a aplicação dos modelos de secagem se dá na sua maioria em produtos com formas bem conhecidas tais como: esferas, cilindros, paralelepípedos, geralmente assumindo propriedades de transporte constantes, sendo que poucos trabalhos tratam do transporte simultâneo de líquido e vapor. Portanto, existe a necessidade de modelos que envolvam fluxos simultâneos de líquido e vapor em outras geometrias, tais como esferóides prolato e oblato, geometrias bem conhecidas na natureza. Os modelos que se baseiam na termodinâmica dos processos irreversíveis levam em consideração o transporte de água na forma líquida e de vapor, e propõem que a água move-se em meios capilares porosos, em condições isotérmicas, sob a ação de um gradiente de potencial de transferência de massa. Esse potencial de transferência de massa foi proposto por Luikov e Mikhailov (1965), Luikov (1966) e Luikov (1975) por analogia com a força motriz de transferência de calor, o gradiente de temperatura. Neste sentido, este trabalho tem como objetivo apresentar uma modelagem matemática bidimensional transiente para descrever o transporte de líquido e vapor simultâneo no interior de sólidos esferoidais prolatos usando a termodinâmica dos processos irreversíveis, baseando-se no modelo reportado por Fortes (1978), Fortes (1980), Fortes e Okos (1981), Fortes et al. (1981) e Fortes (1982).

## 2. Modelagem Matemática

Denotando por  $\ell$  e  $v$  as fases líquida e de vapor, respectivamente, as equações para os fluxos de líquido, vapor e calor são dadas pelas seguintes expressões (Fortes, 1978):

$$\vec{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell R_v \ln H \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_\ell k_\ell \vec{g} \quad (1)$$

$$\vec{J}_v = -k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \left( \frac{H k_v \rho_{v0}}{T R_v} \right) \vec{g} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_q = & -k_T \nabla T - \left( \rho_\ell k_\ell R_v \ln H + k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \\ & + T \left( \rho_\ell k_\ell R_v \ln H + k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \vec{g} \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\vec{J}_\ell$  é o fluxo de líquido,  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ;  $\rho_\ell$  é a densidade do líquido,  $\text{kg.m}^{-3}$ ;  $k_\ell$  é a condutividade do líquido,  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ;  $\vec{g}$  é o vetor aceleração da gravidade;  $\vec{J}_q$  fluxo de calor,  $\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ;  $T$  é a temperatura, K;  $H$  é a umidade relativa, decimal;  $M$  é o teor de umidade (b.s),  $\text{kg.kg}^{-1}$ ;  $R_v$  é a constante do gás para o vapor,  $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}$ ;  $\vec{J}_v$  é o fluxo de vapor,  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ;  $k_v$  é a condutividade de vapor,  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ , e  $\rho_{v0}$  é a densidade do vapor no estado de saturação.

A partir das equações (1-3), pode-se escrever as seguintes equações de conservação:

$$\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_s c_b T)}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_s h_w M)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \nabla \cdot (h_{fg} \vec{J}_v) - \vec{J}_\ell c_\ell \nabla T - \vec{J}_v c_v \nabla T \quad (5)$$

onde  $c_b = c_s + c_\ell M_\ell + c_v M_v$  é calor específico do meio úmido;  $h_w$  é o calor diferencial específico de sorção;  $h_{fg}$  é o calor latente específico de vaporização;  $c_p$  é o calor específico do produto seco;  $c_\ell$  é o calor específico do líquido, e  $c_v$  é o calor específico do vapor.

Na Figura 1, apresenta-se um sólido esferoidal prolato onde  $L = \sqrt{L_2^2 - L_1^2}$ , é o comprimento focal, sendo  $L_1$  e  $L_2$  os semi-eixos menor e maior da elipse, respectivamente. Para sólidos esferoidais prolatos e considerando o problema para o caso bidimensional sem efeito de gravidade, pode-se escrever as equações (4) e (5) como segue:

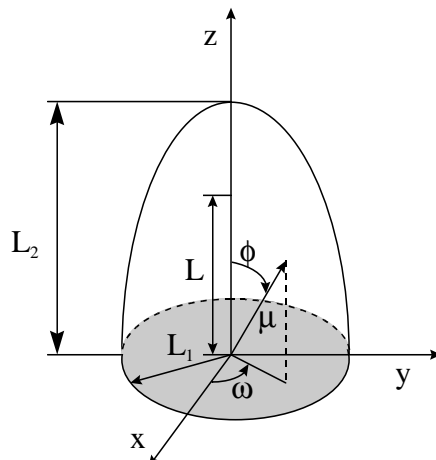


Figura 1. Características de um esferóide prolato sólido. Fonte: Lima (1999).

- Massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s M) = \nabla \cdot (\Gamma_1^\Phi \nabla M) + \nabla \cdot (\Gamma_2^\Phi \nabla T) \quad (6)$$

- Energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_w M) = \nabla \cdot (\Gamma_3^\Phi \nabla T) + \nabla \cdot (\Gamma_4^\Phi \nabla M) + \nabla \cdot (\Gamma_5^\Phi \nabla T) + \\ + \nabla \cdot (\Gamma_6^\Phi \nabla M) + \Gamma_7^\Phi \nabla T \cdot \nabla T + \Gamma_8^\Phi \nabla M \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (7)$$

onde o operador nabla está escrito em coordenadas esferoidais prolatas (Oliveira, 2006). Os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\Phi &= \left( \rho_1 k_1 \frac{R_v T}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v \rho_{v0} \left( \frac{\partial H}{\partial M} \right) \right); & \Gamma_2^\Phi &= \left( \rho_1 k_1 R_v \ln(H) + k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \\ \Gamma_3^\Phi &= k_T; & \Gamma_4^\Phi &= \rho_1 k_1 R_v \ln(H) + k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \left[ \frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right] \\ \Gamma_5^\Phi &= h_{fg} k_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right); & \Gamma_6^\Phi &= h_{fg} k_v \rho_{v0} \left( \frac{\partial H}{\partial M} \right) \\ \Gamma_7^\Phi &= \left[ c_1 \rho_1 k_1 R_v \ln(H) + k_v c_v \left( \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \left( \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \right]; & \Gamma_8^\Phi &= \left[ c_\ell \rho_\ell k_\ell \frac{R_v}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \right] \end{aligned} \quad (8a-h)$$

As seguintes condições inicial, de contorno e simetria foram usadas:

Massa:

$$\begin{aligned} M(\xi; \eta; t = 0) = M_0 = \text{cte}; & \quad (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v)_{\xi=L_2/L} = h_m(M - M_e) \\ \frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 & \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 & \quad \frac{\partial M(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{região de simetria}). \end{aligned}$$

Calor:

$$T(\xi; \eta; t = 0) = T_0 = \text{cte} \quad \bar{J}_q|_{\xi=L_2/L} = h_c(T_s - T_a) + h_{fg}\bar{J}_\ell + (\bar{J}_\ell + \bar{J}_v)c_v(T_s - T_a)$$

$$\frac{\partial T(\xi = 1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial T(\xi; \eta = 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial T(\xi; \eta = 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{região de simetria}).$$

onde as variáveis  $\xi = \cosh\mu$ ,  $\eta = \cos\phi$  e  $\zeta = \cos\omega$  são as coordenadas do sistema esferoidal prolato (Magnus et al., 1966).  
O teor de umidade médio é dado por:

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \quad (9)$$

A temperatura média é dada por:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{V} \int_V \theta dV \quad (10)$$

Segundo Fortes e Okos (1981), a diferença fundamental entre sua teoria e as anteriores, é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, sendo isto devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz para a transferência de líquido e vapor é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Neste modelo, é postulado que a água em meios capilares porosos pode até mover-se no sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio. Assim, o teor de umidade de equilíbrio é apresentado como uma escolha mais natural para o potencial de transporte de massa que simplesmente o teor de umidade.

- Variação de volume

A determinação do volume do corpo em qualquer instante baseia-se no trabalho de Sokhansanj e Lang (1996). Os autores assumiram que o material se contrai linearmente com o teor de umidade. Os autores propõem a seguinte equação para a determinação do volume do corpo em um instante qualquer:

$$\frac{V_t}{V_o} = \left[ \frac{1 - \bar{M}_o}{1 + (\gamma - 1)\bar{M}_o} \right] \left[ \frac{1 + (\gamma - 1)\bar{M}}{1 - \bar{M}} \right] \quad (11)$$

onde  $\gamma = \frac{\rho_d}{\rho_1}$ , é a densidade específica do grão, sendo  $\rho_d$  a densidade do produto e  $\rho_1$  a densidade da água.

O significado físico do encolhimento, esta associado com a variação máxima do volume sofrida por um sólido durante o processo de secagem. Assim, por exemplo, se seu valor for de 40 %, significa que o volume do corpo ao final do processo, quando este atinge seu teor de umidade de equilíbrio, será exatamente 60% do seu valor inicial. De acordo com as considerações adotadas para este modelo, pode ser verificado que a variação do volume sofrida pelo corpo, é igual ao volume da água evaporada num certo intervalo de tempo.

Para determinação do volume em certo intervalo de tempo, considere a Figura 2. Durante o processo de secagem assumiu-se que o encolhimento é isotrópico e que a taxa de variação de  $L_1$  relaciona-se à taxa de variação de  $L_2$ , de tal forma que a relação  $L_2/L_1$  permanece constante durante todo o processo. Assim o coeficiente angular da reta apresentada na Figura 2 é constante em cada instante de tempo. Isto é:

$$Tg\hat{\theta} = (L_2 / L_1)_t = \text{cte}. \quad (12)$$

Por outro lado, conhecendo o volume de um elipsóide dado por:

$$(V)_t = \frac{4}{3} \pi (L_2)_t (L_1)_t^2 \quad (13)$$

pode-se determinar os novos valores de  $L_1$  e  $L_2$ .

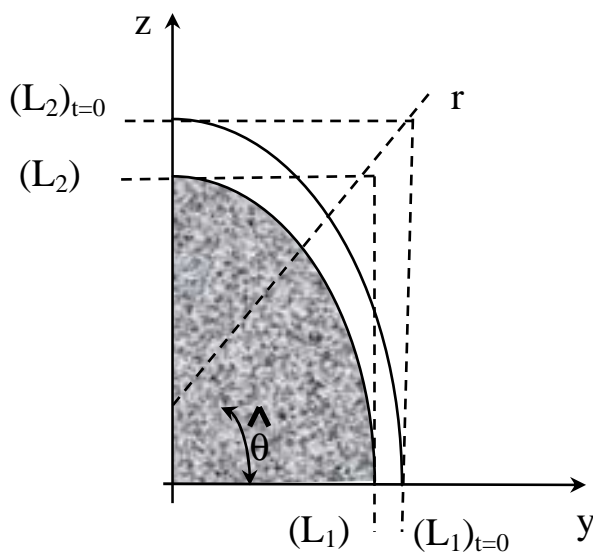


Figura 2-Encolhimento do sólido esférico prolatado durante o processo de difusão Fonte: Lima,(1999).

A área superficial de esférico prolatado ( $L_2 > L_1$ ) é dada por (Polya e Szego, 1945):

$$(S)_t = 2\pi(L_2)_t(L_1)_t^2 \left\{ \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} + \frac{\arcsen \left[ \sqrt{-\left[ \left( \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right)^2 - 1} \right]} \right]}{\sqrt{-\left[ \left( \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right)^2 - 1} \right]}} \right\} \quad (14)$$

### 3. Solução Numérica

A equação de difusão em coordenadas elípticas é resolvida numericamente utilizando o método de volumes de controle finitos, usando a prática B. Neste esquema, os pontos nodais estão centrados no volume de controle e a malha adotada possui volumes inteiros em todo o domínio (Patankar, 1980; Maliska, 2004). O procedimento foi preferido por duas razões: porque facilita a generalização da determinação dos coeficientes e por que simplifica a aplicação das condições de contorno. Assumindo-se uma formulação completamente implícita, isto é, todos os termos difusivos da equação são avaliados no instante  $t+\Delta t$ , as equações (6) e (7), integradas sobre o volume de controle, que corresponde aos pontos internos do domínio, e no tempo, podem ser escritas na forma:

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_P^0 \Phi_P^0 + b \quad (15)$$

onde  $\Phi$  representa M ou T. Detalhes desta formulação pode ser encontrada em Oliveira (2006).

Como aplicação a metodologia foi usada para descrever a secagem de grãos de trigo. As formulações numéricas das equações de difusão de calor e massa requerem o conhecimento prévio de algumas propriedades físicas do trigo e do ar de secagem. A Tabela 1 apresenta as condições do ar de secagem bem como os teores de umidade inicial ( $M_o$ ), de equilíbrio ( $M_e$ ) e final ( $M_f$ ) do grão de trigo.

Tabela 1 – Condições do ar de secagem e do grão de trigo.

Ar			Trigo							t (min)
T (°C)	H (%)	v (m/s)	$M_o$ (b.s)	$L_1$ (mm)	$L_2$ (mm)	$M_f$ (b.s)	$M_e$ (b.s)	$T_o$ (°C)	$T_e$ (°C)	
87,8	5,6	1,71	0,2110	1,575	3,276	0,127	0,0165	26,0	87,8	1020

Os dados sobre a secagem do trigo apresentados na Tabela 1 foram retirados da literatura (Fortes *et al.*, 1981). Os métodos experimentais utilizados na obtenção destes dados são descrito no referido trabalho. As seguintes equações para o calor específico, isoterma de sorção, calor latente de vaporização, densidade do sólido seco, constante do gás, calor de sorção, densidade do vapor saturado e condutividade térmica do grão de trigo foram usadas (Fortes *et al.*, 1981; Brooker *et al.*, 1992):

$$c_b = \{ 1,394 + 0,0409[(100 \times M / (1 + M))] \} \times 10^3 \text{ (J/kgK);}$$

$$H = 1 - \text{Exp} \left[ - 5869 \times \left( T^{-0,7750} \times M \left\{ 5203 \times T^{(-1,363)} \right\} \right) \right] \text{ (decimal);}$$

$$h_{fg} = \left( 3,11 \times 10^6 - 2,38 \times 10^3 \times T \right) + \left( \frac{R_v \times T^2 \times \frac{\partial H}{\partial T}}{H} \right) \text{ (J/kg);}$$

$$\rho_s = 1265 \text{ kg/m}^3; \quad R_v = 462,69 \text{ J/kg/K}; \quad h_w = R_v \frac{T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial T} \text{ (J/kg);}$$

$$\rho_{v0} = 2,54 \times 10^8 / T \exp(-5200/T) \text{ (kg/m}^3\text{);} \quad k_t = 0,1170 + 0,0011319 \times (100 \times M) / (1 + M) \text{ (W/mK)}$$

Os valores das propriedades do ar e da água consideradas para este trabalho são:

$$c_a = 1041,992 \text{ J/kg}; \quad c_v = 1919,849 \text{ kJ/(kgK)}; \quad k_a = 0,029380 \text{ W/(m.K)}$$

$$c_\ell = 4218,709 \text{ J/(kgK)}; \quad \mu_a = 20,6473 \times 10^{-6} \text{ Pas}; \quad \rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_a = 0,964790 \text{ kg/m}^3; \quad D_{va} = 34,05357 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

O teor de umidade médio do grão de trigo, ajustado a dados experimentais de Fortes *et al.* (1981), usando o Software Estatística<sup>®</sup> foi obtido pela seguinte equação:

$$\bar{M} = 0,0921326 \times \text{Exp}(0,0001058t) + 0,122217 \times \text{Exp}(-0,0016447t) \quad (16)$$

Com respeito ao coeficiente de transferência de calor convectivo, o mesmo é obtido considerando o grão de trigo como esfera de igual volume de um elipsóide de dimensões  $L_1=1,574 \text{ mm}$  e  $L_2=3,276 \text{ mm}$ , como segue:

$$h_c = \frac{k_a}{d_p} \left( 2 + 0,6 R_e^{1/2} P_r^{1/3} \right) \quad (17)$$

$$\text{onde } R_e = \frac{\rho_a v_a d_p}{\mu_a} \text{ e } P_r = \frac{c_a \mu_a}{k_a}.$$

As equações referentes às condutividades de líquido e vapor são dadas por:

$$k_\ell = a_1 \times 4,366 \times 10^{-18} H^3 \times \exp(-1331/T)$$

$$k_v = a_2 \times 6,982 \times 10^{-9} \times (T - 273,16)^{0,41} \left( H^{0,1715} - H^{1,1715} \right) \quad (18a-b)$$

O ponto de partida foi à expressão matemática de  $k_\ell$  e  $k_v$  reportada por Fortes *et al.* (1981), aplicadas a trigo assumindo que o grão tem uma form igual a uma esfera. Estas equações foram corrigidas para um esferóide prolato multiplicando estas equações por um parâmetro constante a ser obtido. Os valores dos parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$  e  $h_m$

(coeficiente de transferência de massa), foram obtidos por ajuste entre os dados numéricos e experimentais do teor de umidade, usando a técnica do erro quadrático mínimo. Os desvios entre os valores experimentais e simulados, bem como a variância, foram calculados como segue:

$$ERMQ = \sum_{i=1}^n (\bar{M}_{i,Num} - \bar{M}_{i,Exp})^2 \quad \bar{S}^2 = \frac{ERMQ}{(n - \hat{n})} \quad (19a-b)$$

onde  $n$  é o número de pontos experimentais e  $\hat{n}$  é o número de parâmetros encontrados (Figliola e Beasley, 1995). Os resultados numéricos foram obtidos, usando uma malha de 20x20 pontos e um  $\Delta t = 1s$ , obtidos após um refinamento de malha e intervalo de tempo. Em todos os casos analisados foi utilizado o método de Gauss-Siedel para a solução do sistema de equações geradas, com um critério de convergência de  $10^{-8}$  kg/kg, para o teor de umidade e  $10^{-8}^{\circ}C$  para a temperatura.

#### 4. Resultados e Discussões

Os coeficientes de transportes  $k_l$  e  $k_v$ , foram estimados a partir da minimização do erro entre os valores do teor de umidade simulados e experimentais. A Tabela 2 apresenta os valores dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  bem como o erro relativo. A pequena discrepância indica que o modelo apresenta um bom ajuste com os dados experimentais. É importante comentar que o coeficiente de transferência de massa reportado por Fortes *et al.* (1981), difere daquele obtido neste trabalho. Estes coeficientes têm características diferentes. Enquanto o  $h_m$  obtido por Fortes *et al.* (1981), se dá a partir de uma equação dependente da pressão de vapor na superfície do grão de trigo, neste trabalho o  $h_m$  é obtido a partir de um equacionamento que é função do teor de umidade na superfície do grão de trigo.

Tabela 2 – Comparação da condutividade de líquido e vapor e erro residual

Este trabalho				Fortes <i>et al.</i> (1981)		ERMQ (x10 <sup>+4</sup> )	$\bar{S}^2$ (x10 <sup>+3</sup> )
a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	$h_m \times 10^{-6}$ (m/s)	$h_c$ (W/m <sup>2</sup> K)	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>		
33,95	3,31	2,1	85,4467	1	1	1,27244	0,0049

Na Figura 3, vê-se a comparação dos resultados do teor de umidade preditos por este trabalho com os dados experimentais reportado na literatura (Fortes *et al.* 1981). Analisando a cinética de secagem é visível a boa concordância, devido ao valor do  $h_m$  finito, como também da consideração da variação do volume do grão durante o processo. A Figura 4 mostra o aquecimento de um grão de trigo ao longo do tempo de secagem. Como era de esperar, a temperatura média do grão de trigo alcança a temperatura de equilíbrio em um intervalo de tempo relativamente pequeno ( $\approx 100s$ ), devido a condição de contorno utilizada, aos ajustes feitos nos coeficientes, e principalmente a alta condutividade térmica do grão de trigo.

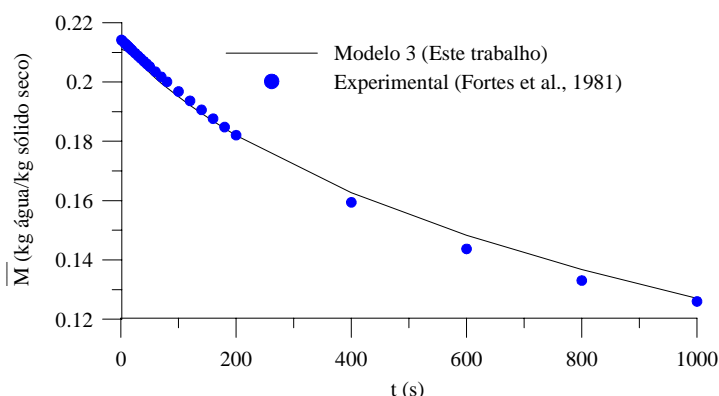


Figura 3 - Comparação entre os teores de umidade médio em função do tempo de secagem e os reportados por Fortes *et al.* (1981).

As Figuras 5-8 mostram o comportamento dos fluxos de líquido e de vapor durante o processo de secagem na superfície do grão de trigo. Verifica-se que o fluxo de vapor é dominante na superfície do sólido, no entanto, vale salientar que nas regiões mais úmidas (interior do sólido), o fluxo de umidade se dá predominantemente na fase líquida, dependendo do teor de umidade local. É observável nas figuras, uma perturbação no início do processo. Isto é devido à instabilidade do produto como também a um ajustamento de todo equacionamento desse modelo, que por ser complexo

e altamente não-linear, dificulta a sua convergência. Isto foi minimizado pelo o uso de um baixo do  $\Delta t = 1s$ , nas simulações. Na Figura 6 evidencia-se que no início do processo houve um rápido decréscimo da relação  $J_v/J_l$ , já que neste modelo o coeficiente de transporte de massa é finito e a condição de contorno usada é a convectiva. É observável nas Figuras 7 e 8 que nos instantes iniciais a secagem é mais acentuada, se ajustando logo após, isto é devido mais uma vez a condição de contorno utilizada e o coeficiente de transporte de massa que influência bastante no processo.

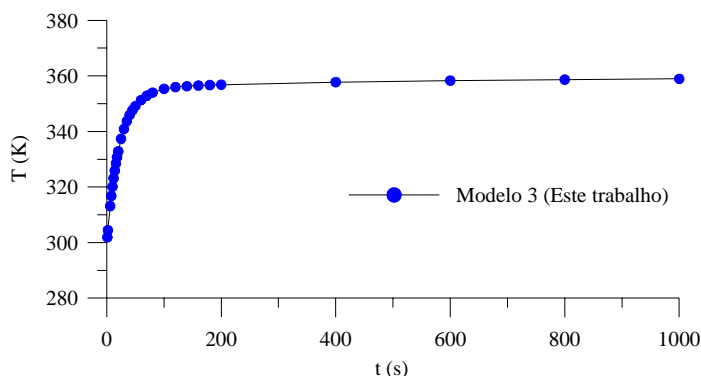


Figura 4 - Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo.

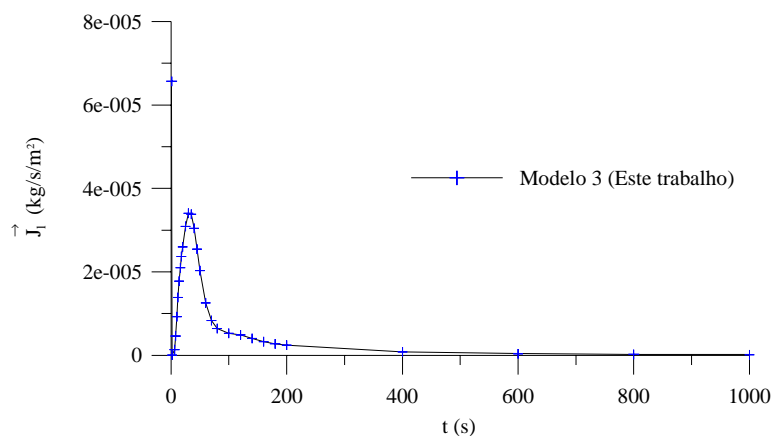


Figura 5 - Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C

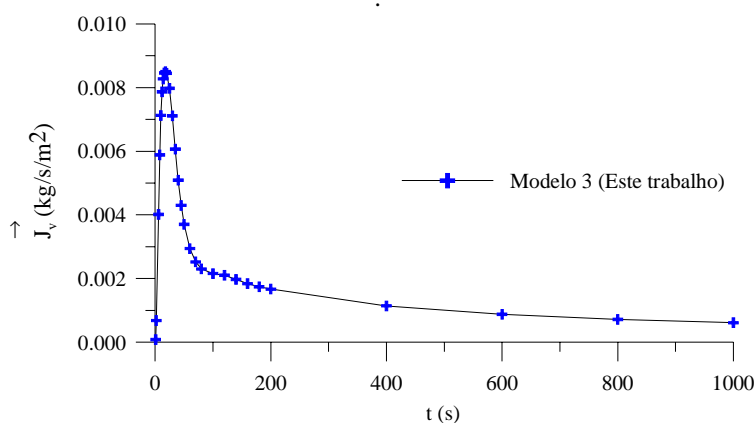


Figura 6 - Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C.

As Figuras 9a- c mostram a distribuição do teor de umidade dentro de um grão de trigo em três tempos de processos ( $t=100s$ ;  $600s$ ;  $1000s$ ), respectivamente. Nestas figuras, estão mostrados pontos no interior do sólido que têm o mesmo teor de umidade; são linhas de iso-umidade. A região nas proximidades do ponto focal seca mais rápido devido ao formato do sólido. Além do mais, quanto maior o tempo de secagem, sempre há um decréscimo no teor de umidade médio. Segundo o modelo de encolhimento apresentado neste trabalho a perda de umidade é proporcionalmente linear à variação do teor de umidade médio do sólido.



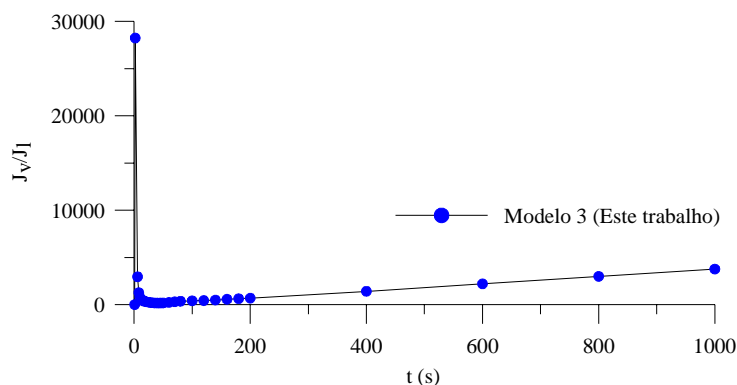


Figura 7 – Relação  $J_v/J_1$  na superfície do grão de trigo a uma temperatura de  $87,8^\circ\text{C}$ .

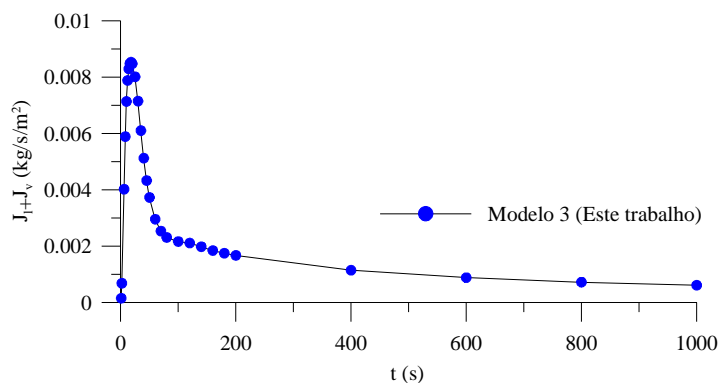


Figura 8 – Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo uma temperatura de  $87,8^\circ\text{C}$ .

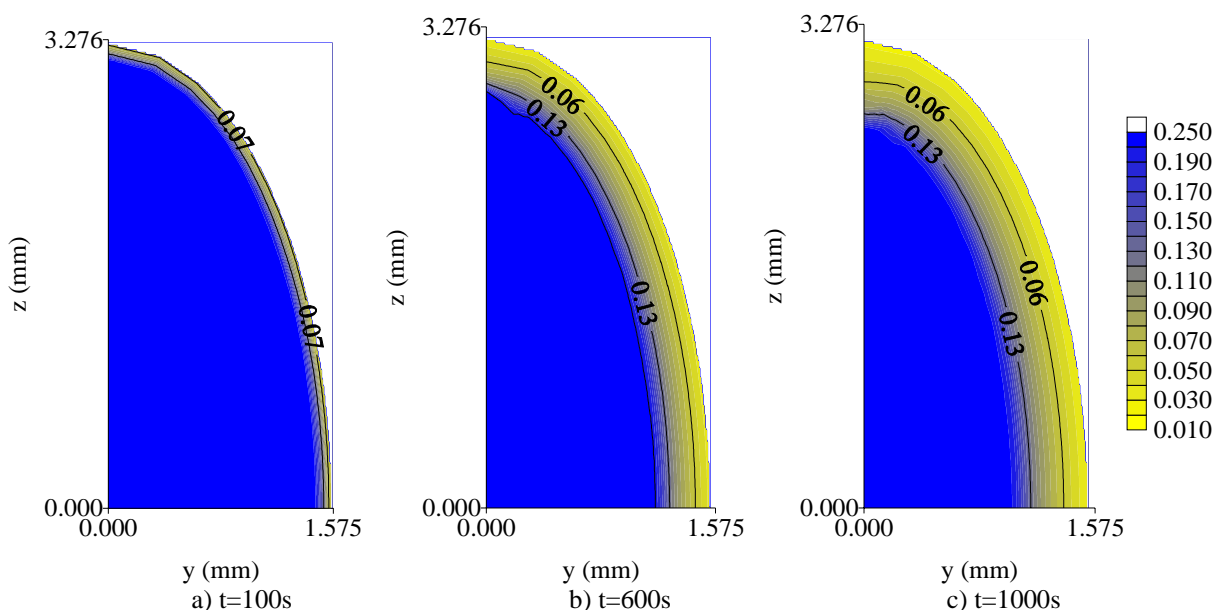


Figura 9- Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo e a  $87,8^\circ\text{C}$ .

Para o tempo 1000s, pode-se notar que o efeito do encolhimento sobre a secagem é mais acentuado, e a redução nas dimensões do sólido normalmente acelera o processo de secagem. Outro aspecto é que o tempo total de secagem é sempre menor, quando o encolhimento do produto é considerado na modelagem matemática. O estudo do fenômeno de deformações e variações dimensionais é de grande importância para melhor compreender o processo de secagem, fornecer subsídios para realizar uma secagem ótima e prevenir trincas no interior do sólido, durante o processo. Pode ser observado que o teor de umidade decresce do centro para a superfície do grão e com o aumento do tempo de secagem. Verifica-se ainda, que a secagem é mais rápida na área próxima ao ponto focal e que os maiores gradientes de umidade ocorrem nas proximidades da superfície do grão, diminuindo com o aumento do tempo de secagem. Sendo assim, estas regiões são mais suscetíveis a trincas, fissuras e deformações que podem comprometer a qualidade do produto biológico. Também pode ser visto que uma frente de evaporação móvel acontece da superfície para o centro do grão.

As Figuras 10a–b apresentam a distribuição de temperatura no interior do grão de trigo para os tempos 10s e 20 s. Como era de se esperar o comportamento da temperatura no interior do corpo é semelhante ao comportamento do teor de umidade, ou seja, nas regiões próximas ao centro do trigo a temperatura de equilíbrio demora mais a ser atingida. Para o tempo de 20s uma situação semelhante é apresentada. Neste tempo a temperatura de equilíbrio do trigo já está próxima de ser atingida.

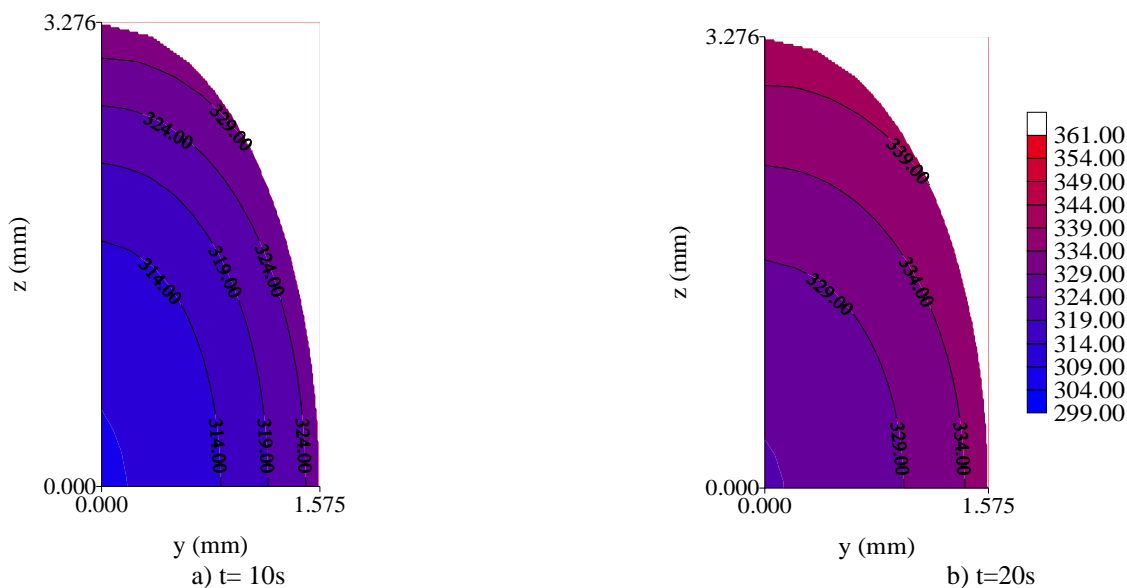


Figura 10 – Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a 87,8°C.

A Figura 11 ilustra a malha numérica utilizada na formulação para dois intervalos de tempo (t=100s e t=1000s). Percebe-se que este tipo de malha é conveniente por se adequar à forma do corpo. É evidente a significativa influência do encolhimento na taxa de remoção de umidade. Observa-se que para um tempo maior de processo, o encolhimento é mais visível.

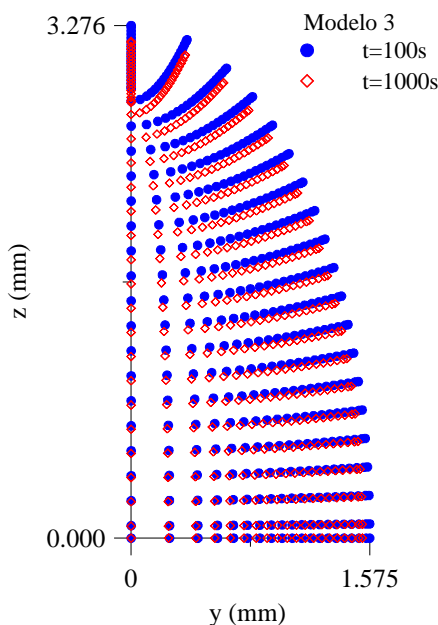


Figura 11. Evolução da malha numérica durante o encolhimento do grão de trigo (razão de aspecto  $L_2/L_1=2,08$ ), secando a 87,8°C.

### 3. Conclusões

Dos resultados obtidos pode-se concluir que o modelo matemático proposto é adequado e versátil, podendo ser usado para prever outros fenômenos difusivos, tais como: resfriamento e umidificação como também para prevê regiões com altos gradientes de temperatura e umidade no interior de sólidos esferoidais, que são importantes no

controle da qualidade final do produto. Como o grão de trigo tem o teor de umidade baixo, o mecanismo de migração dominante é o fluxo de vapor, na superfície do produto, apresentando uma relação  $J_v/J_\ell > 10^4$ , em média. A consideração do encolhimento do sólido no equacionamento, altera sua taxa de secagem;

### 3. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, ANP, FINEP e PETROBRÁS pelo suporte financeiro a esta pesquisa, e aos pesquisadores que com seus estudos ajudaram no melhoramento deste trabalho.

### 4. Referências

- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F.W. and Hall, C. W., 1992, "Drying and Storage of Grains and Oilseeds", AVIBook, New York, USA.
- Figliola, R. S. and Beasley, D. E., 1995, "Theory and Design for Mechanical Measurement", John Wiley & Sons,
- Fortes, M. and Okos, M. R., 1980, "Advances in Drying", Chapter: Drying Theories: Their Bases and Limitations as Applied to Foods and Grains". Hemisphere Publishing Corporation, Washington, USA, pp.119-154.
- Fortes, M. and Okos, M. R., 1981, "Non-equilibrium Thermodynamics Approach to Heat and Mass Transfer in Corn Kernels", Transactions of the ASAE, Vol. 24, pp. 761-769.
- Fortes, M., 1982, "Um Estudo Fundamental das Equações de Transporte de Massa e Energia em Meios Capilares Porosos". Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, Brasil, 100 p. Tese (Livre Docência).
- Fortes, M. 1978, "A Non-equilibrium Thermodynamics Approach to Transport Phenomena in Capillary Porous Media with Special Reference to Drying of Grains and Foods". Purdue University, 226p, USA. (Ph.D Thesis).
- Fortes, M., Okos, M.R. and Barret Jr., J. R., 1981, "Heat and Mass Transfer Analysis of Intra-kernel Wheat Drying and Rewetting", J. Agricultural Engineering Research, Vol.26, pp.109-125.
- Lang, W.; Sokhansanj, S., 1996, "Dynamic Shrinkage and Variable Parameters in Bakker- Arkema's Mathematical Simulation of Wheat and Canola Drying". Drying Technology, v. 12, n. 7, p. 1687-1708.
- Lima, A. G. B., 1999, "Diffusion Phenomenon in Prolate Spheroidal Solids. Case Studies: Drying of Banana", Doctor Thesis, State University of Campinas, Campinas, Brazil.
- Luikov, A. V. and Mikhailov, Yu. A., 1965, "Theory of Energy and Mass Transfer", Pergamon Press Ltd, Oxford.
- Luikov, A. V., 1966, "Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies", Pergamon Press, New York, USA.
- Luikov, A. V., 1975, "Systems of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies: Review", Int. Journal of Heat and Mass transfer, Vol. 18, pp.1-14.
- Magnus, W.; Oberhettinger, F., and Soni, R. P., 1966, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Springer-Verlag, Berlin.
- Maliska, C.R., 2004, "Computational Heat Transfer and Fluid Mechanics", 2. ed. Rio de Janeiro: LTC (In Portuguese).
- Oliveira, V. A. B., 2006, "Transferência de Calor e Massa no Interior de Sólidos com Forma Esferoidal Prolata via Termodinâmica dos Processos Irreversíveis". Tese de Doutorado. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA.
- Pólia, G., Szego, G., 1945, "Inequalities for Capacity of Condenser". American Journal of Mathematics, vol.LXVII, p.1-32.
- Strumillo, C. and Kudra, T., 1986, "Drying: Principles, Science and Design". Gordon and Beach Publishing, New York, USA, 448 p.

## HEAT AND MASS TRANSPORT AND DIMENSIONS VARIATIONS IN PROLATE SPHEROID USING THE THERMODYNAMIC OF THE IRREVERSIBLE PROCESSES

### Vital Araújo Barbosa de Oliveira

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, Av. Aprígio Veloso, 882, Bodocongó, Caixa Postal: 10069, CEP: 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil. vaboliveira@ibest.com.br

### Antonio Gilson Barbosa de Lima

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, Av. Aprígio Veloso, 882, Bodocongó, Caixa Postal: 10069, CEP: 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil. gilson@dem.ufcg.edu.br

**Abstract.** *The aim of this work is to present a two-dimensional mathematical modeling that describes heat and mass (liquid and vapor) transport inside the prolate spheroidal solids using the thermodynamics of the irreversible processes. The model considers convective boundary condition at the surface of the material, shrinkage and variable transport properties. The mathematical modelling was solved using the finite-volume method and fully implicit formulation. As an application, the methodology was used to predict heat and mass transfer (liquid and vapor), inside the wheat grain in the following air drying conditions:  $T = 87.8^\circ\text{C}$ ,  $H = 5.6\%$  e  $v = 1.71\text{m/s}$ . Numerical results of the average moisture content and temperature inside the product were compared to the*

*experimental data reported in the literature and a good agreement was obtained. Results of the liquid and vapor conductivity were obtained using the least square error technique. It was verified that the temperature of the product reaches the equilibrium condition quickly and that the product in certain regions dry faster, due to the ellipsoidal shape. The shrinkage affected the drying rate of the solid.*

**Keywords:** *heat, mass, finite-volume, ellipsoid, shrinkage, wheat*